

УДК 514.76

КЛАССИФИКАЦИЯ КОШИ-РИМАНА ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glazirina@mail2000.ru

В четырехмерном евклидовом пространстве рассматривается двумерное многообразие $U_{1,2}$ прямых l_1^4 . С этим многообразием инвариантным образом ассоциируются двумерные многообразия $V_{1,2}^1$ и $V_{1,2}^2$ плоскостей L_1^1 и L_2^2 . Поэтому на многообразии возникают отображения между соответствующими плоскостями L_1^1 и L_2^2 (в каждом элементе $l_1^4 \in U_{1,2}$). Каждое из этих отображений определяется системой двух неоднородных квадратичных функций с двумя неизвестными или соответствующей комплексной функцией. Рассматриваются случаи, когда указанные функции являются дифференцируемыми в смысле Коши-Римана или гармоническими в некоторых или во всех точках соответствующих плоскостей L_1^1 или L_2^2 . Доказывается существование указанных случаев.

Обозначения и терминология в данной статье соответствуют принятым в [1].

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство E_4 , отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_j\}$ ($j, k, l = 1, 2, 3, 4$) с производными формулами и структурными уравнениями:

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega^j \bar{e}_j, \quad d\bar{e}_j = \omega_k^j \bar{e}_k, \\ D\omega^j &= \omega^k \wedge \omega_k^j, \quad D\omega_k^j = \omega_k^l \wedge \omega_l^j. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь 1-формы ω_k^j удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^j + \omega_j^k = 0, \quad (2)$$

которые с учетом (1) вытекают из условия ортонормальности репера R :

$$\{\bar{e}_k, \bar{e}_j\} = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

где символом $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ обозначается скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} пространства E_4 .

В пространстве E_4 рассматривается многообразие $U_{1,2}$ — двумерное многообразие прямых l_1^4 . К этому многообразию $V_{1,2}^1$ присоединим ортонормальный репер R так, чтобы

$$l_1^4 = (\bar{A}, \bar{e}_4). \quad (3)$$

В данной статье будет показана возможность применения результатов статьи [1] к многообразию $U_{1,2}$ в четырехмерном евклидовом пространстве E_4 .

Из (3) с учетом (1, 2) следует, что на многообразии $U_{1,2}$ выполняются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= A_{\alpha}^3 \omega^{\alpha}, \quad \omega_4^f = A_{4\alpha}^f \omega^{\alpha} \Rightarrow \omega_f^4 = -A_{f\alpha}^4 \omega^{\alpha}; \\ (dA_{\beta}^3 - A_{\gamma}^3 \omega_{\beta}^{\gamma} + \omega_{\beta}^3 + (A_{\gamma}^3 A_{4\beta}^{\gamma} - A_{4\beta}^3) \omega^4) \wedge \omega^{\beta} &= 0, \\ \left(dA_{4\alpha}^f - A_{4\gamma}^f \omega_{\alpha}^{\gamma} + A_{4\alpha}^h \omega_h^f + \right. & \\ \left. + A_{4\beta}^f A_{\alpha}^3 \omega_{\beta}^3 + A_{4\beta}^f A_{4\alpha}^{\beta} \omega^4 \right) \wedge \omega^{\alpha} &= 0, \quad (4) \\ (\alpha, \beta, \gamma &= 1, 2; f, h = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Из (1) с учетом (3) замечаем, что с каждым элементом l_1^4 многообразия $U_{1,2}$ ассоциируется 3-вектор $[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3]$, (5)

ортogonalный вектору \bar{e}_4 — направляющему вектору прямой l_1^4 .

Из $d\bar{e}_4 = \omega_4^f \bar{e}_f = A_{4\alpha}^f \omega^{\alpha} \bar{e}_f$ получаем, что бивектор

$$[A_{41}^f \bar{e}_f; A_{42}^h \bar{e}_h] \quad (6)$$

параллелен касательной плоскости к сферическому изображению вектора \bar{e}_4 .

Проведем такую канонизацию ортонормального репера R , при которой

$$A_{4\beta}^3 = 0 \Leftrightarrow \omega_4^3 = 0, \quad B = \begin{vmatrix} A_{11}^4 & A_{12}^4 \\ A_{21}^4 & A_{22}^4 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (7)$$

что с учетом (4) и (1) приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha}^3 &= A_{\alpha\beta}^3 \omega^{\beta}, \quad \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = 0, \\ (dA_{\alpha\beta}^3 - A_{\gamma\beta}^3 \omega_{\alpha}^{\gamma} - A_{\alpha\gamma}^3 \omega_{\beta}^{\gamma} + A_{\alpha\gamma}^3 A_{4\beta}^{\gamma} \omega^4) \wedge \omega^{\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) замечаем, что канонизация ортонормального репера R , осуществленная по формулам (7), существует в соответствии с [2]. Геометрически эта канонизация характеризуется тем, что вектор

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2] \quad (9)$$

параллелен бивектору (6). При этом из рассмотрения исключается случай $B=0$, когда бивектор (6) является неопределенным.

Из (5) и (9) следует, что 3-вектор $[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3]$ параллелен бивектору $[\bar{e}_1, \bar{e}_2]$, а вектор \bar{e}_3 ортогонален бивектору $[\bar{e}_1, \bar{e}_2]$. Поэтому плоскость

$$L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4) \quad (10)$$

проходит через прямую $l_1^4 = (\bar{A}, \bar{e}_4)$ параллельно вектору \bar{e}_3 .

Проведем дальнейшую канонизацию ортонормального репера R , при которой с учетом [1], (1.6), а также (7) и (8) имеем

$$A_{41}^1 + A_{42}^2 = 0, B \neq 0, \quad (11)$$

что приводит с учетом (1) к соотношениям:

$$\omega^4 = A_{\alpha}^4 \omega^{\alpha}, (dA_{\alpha}^4 - A_{\beta}^4 \omega_{\alpha}^{\beta}) \wedge \omega^{\alpha} = 0.$$

Из (10) и (11) в соответствии с [2] замечаем, что указанная канонизация ортонормального репера R существует.

Как и в [1], см. [1] (5.2), находим уравнение фокусной коники K_2^{34} плоскости $L_2^3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$:

$$K_2^{34} \subset L_2^3 : (A_{\alpha 1}^1 A_{\beta 3}^2 - A_{\alpha 2}^1 A_{\beta 1}^2) x^{\alpha} x^{\beta} + A_{\alpha\alpha}^{\alpha} x^{\alpha} + 1 = 0, x^{\alpha} = 0.$$

Отсюда получаем, что прямая l_1^4 пересекает конику K_2^{34} в двух точках X_{α} с радиус-векторами $\bar{X}_{\alpha} = \bar{A} + t_{\alpha} \bar{e}_4$, где t_{α} – корни квадратного уравнения:

$$(A_{41}^1 A_{42}^2 - A_{42}^1 A_{41}^2) t^2 + (A_{41}^1 + A_{42}^2) t + 1 = 0.$$

Отсюда следует, что при фиксации (11) точка A является серединой отрезка $X_1 X_2$ (центром луча l_1^4). При этом из рассмотрения исключается случай $B \equiv -(A_{41}^1 A_{41}^1 + A_{42}^2 A_{41}^1) = 0$, когда точки X_{α} являются, в соответствии с (7) и (11), бесконечно удаленными на прямой l_1^4 .

Замечание 1. Так как точка A – центр луча l_1^4 , то такое линейное подпространство

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2), L_3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \Rightarrow L_2^1 \subset L_3 \quad (12)$$

геометрически характеризуется тем, что оно проходит через точку A параллельно бивектору (9), 3-вектору (5), соответственно.

Из (10) и (12) следует, что с многообразием $U_{1,2}$ – двумерным многообразием прямых $l_1^4 = (\bar{A}, \bar{e}_4)$ в E_4 инвариантным образом ассоциируются многообразия $V_{2,2}^1$ и $V_{2,2}^2$, о которых идет речь в [1]. Поэтому к многообразию $U_{1,2}$ можно применить классификацию Коши-Римана многообразий $V_{2,2}^{\alpha}$, о которой шла речь в [1].

Определение. Многообразием $V_{1,2}^{\alpha}$, $V_{1,2}^{\alpha\alpha}$, $V_{1,2}^{12\alpha}$, $V_{1,2}^{12\alpha\alpha}$ следует называть многообразие $U_{1,2}$, у которого многообразия $V_{2,2}^{\alpha}$ являются многообразиями $V_{2,2}^{\alpha}$,

$V_{2,2}^{\alpha\alpha}$, $V_{2,2}^{12\alpha}$, $V_{2,2}^{12\alpha\alpha}$, соответственно, в смысле определения (4.4) из [1]. Многообразие $V_{2,2}^1$, у которого в каждом элементе точка $F_{1\alpha}$ (см. [1], (4.1)) совпадает с точкой A , называется многообразием $\bar{U}_{1,2}^{12\alpha}$.

Теорема. Многообразие $\bar{U}_{1,2}^{12\alpha}$ существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Проведем канонизацию ортонормального репера R типа ([1], (6.3)), что в силу (7) и (1) приведет к соотношению

$$\omega_1^2 = A_{1\alpha}^2 \omega^{\alpha}.$$

Из ([1], (4.1, 2.6, 3.1–3.3, 4.2)) и (8) с учетом определения (4.4) из [1] и определения (1) получаем, что многообразие $\bar{U}_{1,2}^{12\alpha}$ определяется конечными соотношениями:

$$\begin{aligned} A_2^3 &= A_1^4 = 0, A_1^3 = A_2^4 \neq 0, B_2^3 = B_4^1 = 0, \\ A_{11}^3 &= -A_{22}^3 = -A_{11}^4 = A_{22}^4 = C \neq 0, \\ C^2 + A_{12}^4 A_{21}^4 &\neq 0, A_{12}^4 + A_{21}^4 + A_{12}^3 + A_{21}^3 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

в силу которых с учетом соотношения $\omega_1^2 = A_{1\alpha}^2 \omega_{\alpha}$ на многообразии $\bar{U}_{1,2}^{12\alpha}$ выполняются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= A_1^3 \omega^1, \omega^4 = A_1^4 \omega^2, \omega_4^3 = 0, \\ \omega_1^3 &= C \omega^1 + A_{12}^3 \omega^2, \omega_2^3 = A_{21}^3 \omega^1 - C \omega^2, \\ \omega_1^4 &= -C \omega^1 + A_{12}^4 \omega^2, \omega_2^4 = A_{21}^4 \omega^1 + C \omega^2, \\ \omega_1^2 &= A_{11}^2 \omega^1 + A_{12}^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Внешнее дифференцирование системы (13) и использование (1) приводит к дифференциальному уравнению

$$dA_1^3 = \bar{A}_{1\alpha}^3 \omega^{\alpha} \quad (15)$$

и к квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned} dA_{21}^3 \wedge \omega^1 - dC \wedge \omega^2 &= \tilde{A}_{21}^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dC \wedge \omega^1 + dA_{12}^3 \wedge \omega^2 &= \tilde{A}_{12}^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ -dC \wedge \omega^1 + dA_{12}^4 \wedge \omega^2 &= \tilde{A}_{12}^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dA_{21}^4 \wedge \omega^1 + dC \wedge \omega^2 &= \tilde{A}_{21}^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ dA_{11}^2 \wedge \omega^1 + dA_{12}^2 \wedge \omega^2 &= \tilde{A}_1^2 \omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\bar{A}_{12}^3 = (A_{21}^3 - A_{12}^3) + A_1^3 A_{11}^2 - (A_1^3)^2 A_{12}^2 - (A_1^3)^2$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11}^3 &= (A_{21}^4 - A_{12}^4) - A_1^3 A_{12}^3 + (A_1^3)^2 C + (A_1^3)^2 A_{21}^4, \\ \tilde{A}_{21}^3 &= -A_{21}^3 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) + \\ &+ C (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) - A_{12}^3 + C A_{12}^2, \\ \tilde{A}_{12}^3 &= C (-2 A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ &- A_{12}^3 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{12}^2 A_{21}^3, \\ \tilde{A}_{12}^4 &= C (2 A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ &- A_{12}^4 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{12}^2 A_{21}^4, \\ \tilde{A}_{21}^4 &= -A_{21}^4 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ &- C (2 A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) + A_{12}^2 A_{21}^4, \\ \tilde{A}_1^2 &= -A_{11}^2 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \\ &- A_{12}^2 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4) - (2 C^2 + A_{12}^3 A_{21}^3 + A_{12}^4 A_{21}^4). \end{aligned} \quad (17)$$

Внешнее дифференцирование ур. (15) с учетом (1) и (14) приводит к квадратичному уравнению

$$d\bar{A}_{11}^3 \wedge \omega^1 + d\bar{A}_{12}^3 \wedge \omega^2 = \bar{A}_1^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (18)$$

где
$$\bar{A}_1^3 = -\bar{A}_{11}^3 (\bar{A}_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) - \bar{A}_{12}^3 (A_{12}^2 + A_{11}^3 C + A_1^3 A_{21}^4). \quad (19)$$

Анализ квадратичных уравнений (16) с учетом (17) и (13) приводит к дифференциальному уравнению:

$$dH = H_1 \omega^1 + H_2 \omega^2, \quad (20)$$

где
$$\begin{aligned} H &= A_{12}^3 + A_{12}^4 = -A_{21}^3 - A_{21}^4, \\ H_1 &= \tilde{A}_{12}^3 + \tilde{A}_{12}^4 = A_1^3 (C + A_{21}^4), \\ H_2 &= A_{11}^2 (A_{12}^2 + 2A_{12}^4) + \\ &+ A_1^3 (A_{12}^3 + A_{12}^4) (C - A_{12}^3) - A_{12}^3. \end{aligned} \quad (21)$$

Внешнее дифференцирование ур. (20) с учетом (1) приводит к квадратичному уравнению

$$dH_1 \wedge \omega^1 + dH_2 \wedge \omega^2 = H_{12} \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (22)$$

где
$$\begin{aligned} H_{12} &= -H_1 (A_{11}^2 - A_1^3 A_{12}^3 + A_1^3 C) + \\ &+ H_2 (A_{12}^2 + A_1^3 C + A_1^3 A_{21}^4). \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, функции A_1^3 , C , A_{12}^3 , A_{21}^3 , A_{12}^4 , A_{21}^4 , A_{11}^2 , A_{12}^2 , среди которых в силу (13, 15, 17, 20 и 21) будет пять независимых, удовлетворяют пяти независимым квадратичным уравнениям – трем независимым в (16) и двум (18) и (22) с учетом (19) и (23). Поэтому в силу леммы С.В. Бахвалова [3] заключаем, что многообразие $\tilde{U}_{1,2}^{12r}$ существует и определяется с произволом пяти функций одного аргумента.

Теорема доказана.

Замечание 2. Поскольку многообразия $\tilde{U}_{1,2}^{12r}$ является частным случаем многообразий $U_{1,2}^{12r}$ и $U_{1,2}^{12a}$, то эти многообразия существуют. Вопрос о существовании многообразия $U_{1,2}^{12a}$ будет предметом особого рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазырина Е.Д. Классификация Коши-Римана двумерных многообразий центрированных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 4. — С. 10–14.
2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). — 1962. — № 2. — Р. 231–240.
3. Бахвалов С.В. Замечания к методу подвижного трехгранника // Математический сборник. — 1940. — 7(49). — № 2. — С. 321–326.